

тот и форм колебаний цилиндрической пружины // Математическое моделирование. – 1990. – Т. 2, № 8. – С. 21-30. 3. Григорьев А.Л., Дериенко А.И. Универсальная математическая модель цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХПІ», 2004. – Вип. 2 (9). – С. 257-264. 4. Товстик П.Е. Асимптотический метод интегрирования уравнений колебаний пружин // Вестник ЛГУ. Математика, механика, астрономия. – Л.: ЛГУ, 1962. – Вип. 27. – С. 119-134. 5. Лавинский В.И., Григорьев А.А. Симметричная матричная линеаризованная модель колебаний винтового стержня // II Університетська наук.-практ. конф. магістрантів. Тези доповідей. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2008. – Т. 1. – С. 64-66. 6. Полищук Д.Ф. Влияние граничных условий на спектр частот собственных продольных колебаний цилиндрических пружин // Машиноведение. – 1969. – № 3. – С. 31-35. 7. Григорьев А.Л. Операторный метод расчета вынужденных колебаний цилиндрических пружин // Информационные технологии. Сб. науч. тр. – Харьков: ХГПУ, 1998. – Вип. 6, ч. 4. – С. 54-58. 8. Григорьев А.Л., Дериенко А.И. Алгебраический метод определения собственных частот продольных колебаний цилиндрической пружины // Високі технології в машинобудуванні. – Харків: НТУ «ХПІ», 2002. – Вип. 1 (5). – С. 101-109. 9. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с. 10. Дериенко А.И., Король С.А., Григорьев А.А. Идентификация модели винтового бруса колебаний пружины для расчета спектра собственных частот // Вісник КДПУ. – Кременчук, 2008. – Вип. № 1 (48). – С. 46-50.

Поступила в редколлегию 04.11.2008.

УДК 539.3

Е.И.ЛЮБИЦКАЯ, НТУ «ХПИ», Харьков

ИЗГИБ ПОЛОГИХ ОРТОТРОПНЫХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ ПРИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Розглянуто геометрично нелінійний згин тонких ортотропних пологих оболонок при поперечному навантаженні які взаємодіють з пружною основою типу Вінклера. На базі теорії R-функцій та варіаційних методів надано розв'язки задачі для оболонок складної форми в плані; наведено алгоритм знаходження верхнього та нижнього критичного навантаження. Досліджено закономірності впливу форми плану та жорсткості основи на напружено-деформований стан ортотропних оболонок.

Geometrically nonlinear behavior of orthotropic shallow shells subjected to the transverse load and resting on Winkler's foundation is investigated. On base of R-function theory and variational methods problem's solution for shells with complex plan form is proposed. The algorithm to finding upper and lower critical loads is developed. Influence of plan form, foundation modulus on a stress-deformation state of orthotropic shells is presented.

В данной работе предлагается один из возможных подходов к решению задач геометрически нелинейного изгиба ортотропных пластин и пологих оболочек, имеющих в плане произвольную форму, под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки при учете влияния упругого основания типа Винклера. Подход базируется на применении вариационно-структурного метода R-функций (RFM) [1], методов последовательных нагружений и Ньютона [2]. Для решения задачи о закритической деформации использованы идеи, предложенные в работе [3], которые базируются на методе продолжения по

параметру.

В рамках классической геометрически нелинейной теории [4, 5] разрешающая система дифференциальных уравнений в смешанной форме, описывающая поведение ортотропных пологих оболочек на упругом основании типа Винклера, имеет следующий вид:

$$L_1(D_{ij})W + \Delta_k \Phi - L(W, \Phi) = q - pW; \quad (1)$$

$$L_2(A_{ij})\Phi + \Delta_k W + \frac{1}{2}L(W, W) = 0, \quad (2)$$

где $W(x, y)$, $\Phi(x, y)$ – прогиб и функция усилий, q – заданная поперечная нагрузка, k_1 , k_2 – главные кривизны оболочки, $\Delta_k = k_2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_1 \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, L_1 , L_2 – линейные дифференциальные операторы [5], p – коэффициент жесткости упругого основания.

На границе области искомые функции W , Φ должны удовлетворять краевым условиям, зависящим от способа опирания оболочки. Если условия закрепления соответствуют скользящей заделке, то краевые условия выглядят следующим образом:

$$W = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0; \quad \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0. \quad (3)$$

Для условий скользящего шарнира:

$$W = 0; \quad \frac{\partial^2 W}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} = 0; \quad \Phi = 0; \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad (4)$$

где n и τ – нормаль и касательная к границе области.

Чтобы получить решение поставленной задачи, нелинейную систему (1)–(2) необходимо сначала линеаризовать. Один из распространенных методов линеаризации – метод последовательных нагружений (МПН) [2]. Суммарная величина нагрузки разбивается на n частей δQ_i ($i = \overline{1, n}$). Общее напряженно-деформированное состояние определяется как сумма состояний на каждом этапе нагружения оболочки, в пределах которого деформации считаются малыми по сравнению с толщиной,

$$W^{(n)} = \sum_{i=1}^n \delta W_i; \quad \Phi^{(n)} = \sum_{i=1}^n \delta \Phi_i.$$

Неизвестные функции приращений прогиба и напряжений δW_i и $\delta \Phi_i$ отыскиваются из линейной системы следующего вида:

$$L_1(D_{ij})\delta W_i + \Delta_k \Phi^{(i-1)} - L(\delta W_i, \Phi^{(i-1)}) - L(W^{(i-1)}, \delta \Phi_i) = \delta Q_i - p\delta W_i; \quad (5)$$

$$L_2(A_{ij})\delta \Phi_i + \Delta_k W^{(i-1)} + \frac{1}{2}L(W^{(i-1)}, \delta W_i) = 0.$$

Здесь $W^{(i-1)}$ и $\Phi^{(i-1)}$ – функции, соответствующие значению нагрузки на $(i-1)$ -м шаге нагружения. Уравнения (5) необходимо дополнять соответ-

вующими граничными условиями.

В ходе многократного повторения процедуры увеличения нагрузки в решении накапливаются нежелательные погрешности. Поэтому целесообразно уточнить решение, например, с помощью метода Ньютона-Канторовича, более подробное описание которого можно найти в работах [2, 4].

Для решения последовательности линеаризованных задач изгиба ортотропной полой оболочки применяется вариационный метод Ритца. В результате задача сводится к нахождению точки стационарности соответствующего функционала. Согласно вариационному методу Ритца, искомые функции приращений прогиба δW и напряжений $\delta \Phi$ раскладываются в ряд по некоторой полной системе координатных функций $\{W_j\}$, $\{\Phi_j\}$, удовлетворяющих заданным граничным условиям:

$$\delta W = \sum_{j=1}^{N_1} a_j W_j ; \quad \delta \Phi = \sum_{j=N_1+1}^{N_2} a_j \Phi_j ,$$

где a_j – неопределенные коэффициенты разложений.

Для областей со сложной геометрией построение необходимых последовательностей координатных функций весьма затруднительно, однако применение метода RFM позволяет справиться с подобными трудностями. Прежде всего, с помощью R-функций строится уравнение границы заданного плана оболочки $\omega(x,y) = 0$ [1, 6], а также структурные формулы решения краевой задачи. Если, например, на части контура оболочки ω_1 граничные условия соответствуют скользящей заделке, а на остальной части ω_2 – скользящему шарниру, то структурные формулы, удовлетворяющие главным (кинематическим) граничным условиям, могут быть выбраны как:

$$\delta W = \omega \omega_1 P_1 ; \quad \delta \Phi = \omega^2 P_2 . \quad (6)$$

Здесь P_1, P_2 – неопределенные компоненты структурных формул, которые представляются в виде разложения в ряд по полной системе функций, например, по степенным полиномам $\{\varphi_i\}$, $\{\psi_i\}$:

$$P_1 = \sum_{i=1}^{N_1} a_i \varphi_i ; \quad P_2 = \sum_{i=N_1+1}^{N_2} a_i \psi_i . \quad (7)$$

При определенных геометрических параметрах исследуемой полой оболочки, а также при достижении определенного уровня ее нагружения зависимость прогиба оболочки от величины внешнего давления может быть неоднозначной. Наряду с исходной формой равновесия становится кинематически возможной другая, смежная форма равновесного состояния. К сожалению, методы МПН и Ньютона не позволяют определять верхнюю и нижнюю критические нагрузки, при которых происходит «хлопок» полой оболочки. Подход, позволяющих строить кривую деформирования с последовательным прохождением через все критические точки, в сочетании с теорией R-функций, был использован в работах [7, 8] для изотропных и ортотропных полых оболочек. В данной работе метод развит для ортотропных оболочек на упругом основании.

Применение предложенного алгоритма дает возможность проводить ши-

рокий вычислительный эксперимент на базе программного комплекса POLE-RL [9]. Ниже приведены некоторые примеры задач, решение которых выполнено с помощью разработанного подхода.

Задача 1. Геометрически нелинейный изгиб сферической изотропной панели с круглым планом радиуса $R = 0,1$ (м) на упругом основании типа Винклера (рис. 1) под действием равномерно распределенной нагрузки q . Физические и геометрические параметры оболочки следующие: толщина $h = 0,01$ (м), радиусы кривизны $k_1 = k_2 = 4$ (1/м), модуль упругости $E = 20,4$ (МПа), коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$, коэффициент жесткости основания $p = 4,7$ (кН/м³).

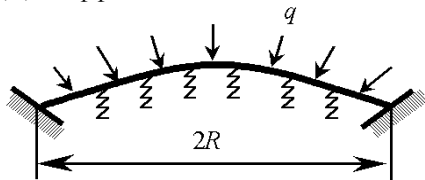


Рисунок 1

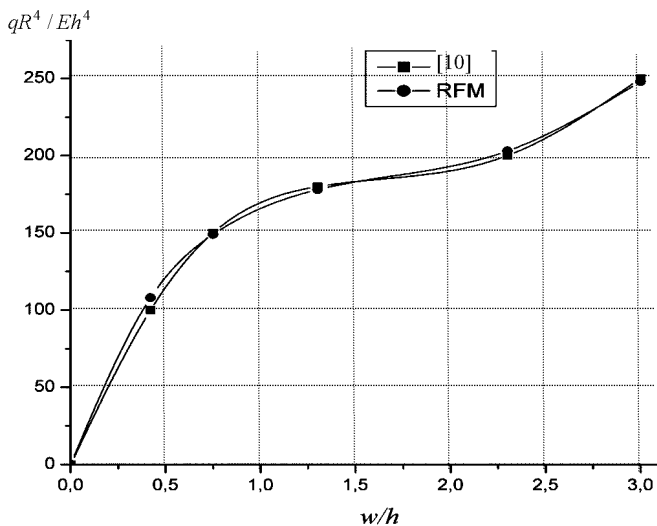


Рисунок 2

Зависимость «нагрузка – прогиб в центре» представлена на рис. 2. Результаты, полученные в работе [10] при помощи метода граничных элементов, не более чем на 0,6 % отличаются от результатов расчетов на базе RFM, что говорит о достоверности разработанного алгоритма.

Задача 2. Исследуем напряженно-деформируемое состояние (НДС) ортотропной сферической пологой оболочки со сложной формой плана и смешан-

ными условиями закрепления (рис. 3) под действием равномерно распределенной нагрузки. Геометрические параметры оболочки следующие: $h = 1$; $b = 0,5 a$; $d = -0,5a$, r – радиус отверстия. Материал – стеклопластик с коэффициентами упругости $E_1/E_2 = 10$; $G/E_2 = 1/3$; $\nu_{12} = 0,22$. Оболочка лежит на упругом основании типа Винклера с коэффициентом упругости p . Внешняя часть контура опирается на скользящий шарнир, на внутренней части – скользящая заделка.

Исследовано влияние упругого основания на вид кривой деформирования оболочки при $\frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 30$; $r = 0,1 a$. Графики «нагрузка – максимальный прогиб» представлены на рис. 4. Анализируя полученные результаты, можно заметить, что при увеличении коэффициента постели основания

$$\tilde{p} = p \frac{E_2 h^3}{a^4} \text{ значение критической нагрузки}$$

ки, при которой происходит хлопок оболочки, растет, а соответствующий ему прогиб w/h увеличивается незначительно и находится в промежутке $4 < w/h < 4,7$. Также отметим, что с увеличением \tilde{p} разница между верхним и нижним критическими значениями (Q_B и Q_H) уменьшается, а также значительно сближаются соответствующие этим нагрузкам прогибы оболочки. При дальнейшем росте коэффициента \tilde{p} зависимость «нагрузка – максимальный прогиб» становится однозначной.

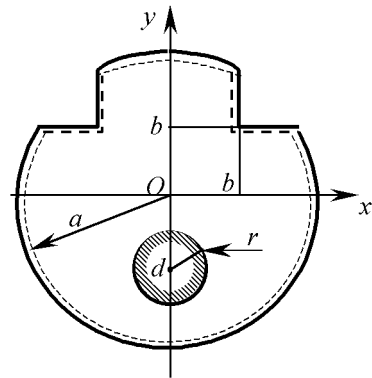


Рисунок 3

Влияние размера отверстия на значения критических нагрузок при $\tilde{p} = 10$ в зависимости от кривизны сферической оболочки представлено на рис. 5. Из графика видно, что небольшое увеличение радиуса отверстия (на $0,05 a$) значительно увеличивает значения Q_B и Q_H и сближает их между собой.

В табл. 1 представлено распределение прогибов и изгибающих напряжений в оболочке в сечении $y = 0$ в зависимости от размеров отверстия. $\frac{q_0 a^4}{E_2 h^4} = 100$, $\frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 10$, $\tilde{p} = 20$. Из таблицы видно, что с ростом размеров отверстия прогибы и напряжения σ_y^H растут, в то время как σ_x^H уменьшаются.

Таким образом, с помощью разработанного на базе RFM подхода возможно на этапе проектирования элементов конструкций выполнять анализ их НДС и проверку удовлетворения параметров напряженного состояния допустимым пределам.

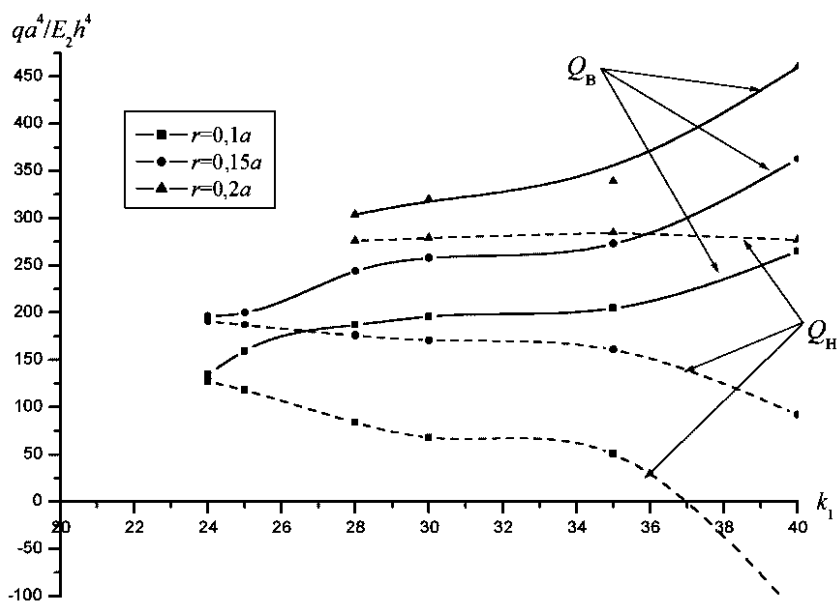
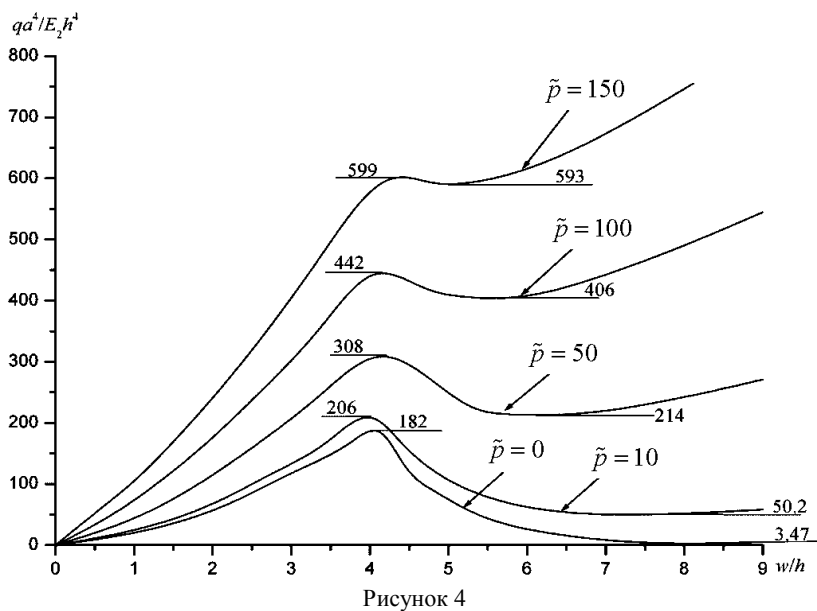


Таблица 1 – Распределение прогибов и напряжений в сечении $y = 0$

$$\text{при } \frac{q_0 a^4}{E_2 h^4} = 100; \frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 10; \tilde{p} = 20$$

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$r = 0,1$						
$w(0,0)/h$	1,85	1,93	1,95	1,66	1,01	0
$\sigma_x^H \frac{a^3}{E_2 h^3}$	-1,23	1,38	3,49	3,16	4,66	4,54
$\sigma_y^H \frac{a^3}{E_2 h^3}$	2,76	2,63	2,14	1,77	1,46	0,75
$r = 0,2$						
$w(0,0)/h$	1,16	1,28	1,40	1,25	0,80	0
$\sigma_x^H \frac{a^3}{E_2 h^3}$	-2,15	0,49	3,24	2,47	4,49	4,20
$\sigma_y^H \frac{a^3}{E_2 h^3}$	1,58	1,84	1,76	1,40	1,24	0,64
$r = 0,3$						
$w(0,0)/h$	0,57	0,71	0,93	0,92	0,63	0
$\sigma_x^H \frac{a^3}{E_2 h^3}$	-2,65	-0,75	2,77	2,40	4,15	3,34
$\sigma_y^H \frac{a^3}{E_2 h^3}$	-0,08	0,61	1,29	1,16	1,06	0,51

Таблица 2 – Влияние \tilde{p} на прогиб и напряжения оболочки из стеклопластика

$$\text{при } \frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 10, r = 0,2$$

	w/h max	$\sigma_x^H \frac{a^3}{E_2 h^3}$		$\sigma_y^H \frac{a^3}{E_2 h^3}$		$\sigma_x^M \frac{a^3}{E_2 h^3}$		$\sigma_y^M \frac{a^3}{E_2 h^3}$	
		max	min	max	min	max	min	max	min
$\tilde{p} = 0$	2,061	7,046	- 13,100	3,347	-3,968	14,109	-9,791	5,856	-6,341
$\tilde{p} = 20$	1,581	5,548	- 10,431	2,500	-3,093	10,740	-7,409	4,806	-4,995
$\tilde{p} = 40$	1,283	4,641	-8,726	1,985	-2,548	8,613	-5,884	4,101	-4,168

В табл. 2 представлены прогиб и экстремальные значения изгибающих и мембранных напряжений в оболочке с кривизной $\frac{k_1 a^2}{h} = \frac{k_2 a^2}{h} = 10$, с радиусом отверстия $r = 0,2$ при варьировании коэффициента жесткости упругого основания. Из таблицы можно сделать вывод, что увеличение коэффициента \tilde{p} снижает степень напряженности пологой оболочки, что соответствует физическому смыслу задачи.

- Список литературы:** 1. Рвачев В.Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения. – К., 1982. – 552 с. 2. Петров В.В. Метод последовательных нагружений в нелинейной теории пластин и оболочек. – Саратов, 1975. – 119 с. 3. Трошин В.Г. Об одном подходе к решению геометрически нелинейных задач технической теории оболочек // Прикладная математика и механика. – Т. 47, вып. 1. – 1983. – С. 101-107. 4. Григоренко Я.М., Мукоед А.П. Решение нелинейных задач теории оболочек на ЭВМ. – Киев: Вища школа, 1983. – 286 с. 5. Амбарцумян С.А. Общая теория анизотропных оболочек. – М., 1974. – 448 с. 6. Рвачев В.Л., Курпа Л.В. R-функции в задачах теории пластин. – К., 1987. – 176 с. 7. Курпа Л.В., Морачковская И.О., Склепус А.Н. Применение метода R-функций к решению нелинейных задач теории пологих оболочек // Проблемы машиностроения. – Т. 4, № 1-2. – 2001. – С. 58-77. 8. Л.В. Курпа, Е.И. Любичкая. Исследование закритического поведения ортотропных пологих оболочек сложной формы в плане // Вестник НТУ «ХПИ». – № 32. – 2006. – С. 92-97. 9. Рвачев В.Л., Шевченко А.Н. Проблемно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов. – К, 1988. – 198 с. 10. Артюхин Ю.П., Грибов А.П. Решение задач нелинейного деформирования пластин и пологих оболочек методом граничных элементов. – Казань: Фэн, 2002. – 199 с.

Поступила в редколлегию 03.11.2008

УДК 621.318:37

Г.Ю.МАРТЫНЕНКО, канд.техн.наук, НТУ «ХПИ», Харьков

МАГНИТНЫЕ ПОДШИПНИКИ КАК УПРУГО-ДЕМПФЕРНЫЕ ОПОРЫ РОТОРОВ С УПРАВЛЯЕМОЙ ЖЕСТКОСТЬЮ

У роботі виконано огляд і порівняльний аналіз різних конструктивних варіантів механічних пружно-демпферних опор роторів і магнітних підшипників. Обґрунтована і виділена як головна перевага магнітних підшипників можливість управління механічною жорсткістю за рахунок зміни немеханічних величин. Запропоновано спосіб зниження амплітуд коливань ротора в магнітних підшипниках при проходженні резонансних режимів в процесі його розгону до робочих обертів обертання і вибігу.

In the paper, a review and comparative analysis of different structural variants of mechanical resiliently-dampers supports of rotors and magnetic bearings is executed. The possibility of control by mechanical stiffness due to the change of unmechanical values is grounded and selected as above all advantage of magnetic bearings. The method of vibrational amplitude contraction of rotor on the magnetic bearings in transition of resonance is offered.

Введение. Конструирование и расчет роторов исторически прошли несколько этапов. Первые машины имели скорости вращения роторов значительно меньшие первой критической. С ростом скоростей вращения, уменьшением габаритов машин и со снижением их массы ротора стали эксплуатироваться при скоростях близких к критическим. Многие современные роторные машины работают в зарезонансных областях, так как использование машин с роторами, частота вращения которых ниже первой критической, приводит к значительному увеличению массы вращающихся частей. Самым рациональным решением при конструировании роторных машин является создание машин с жестким ротором, вращающимся в упругих опорах [1,2]. Такой подход позволяет, не накладывая никаких ограничений на конструкцию и размеры ротора и сохраняя без изменения все его оптимальные конструктивные параметры, определенные для заданных ус-